GIẢI TÍCH 3A
ÔN TẬP THI CUỐI KỲ

HỌC KỲ 1 – NĂM HỌC 2025–2026

Câu 1. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của một sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = kt^2 e^{-2t^2}$ với hằng số $k > 0$.

(a) Tìm k.
(b) Hỏi trung bình sau bao lâu thì sản phẩm hư?

Câu 2. Tọa độ của một điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi hàm mật độ xác suất

$$f(x, y, z) = \frac{C}{(4 + x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

(a) Tìm C.
(b) Tính xác suất để điểm này nằm ngoài quả cầu $B(O, 2)$.

Câu 3. Một sợi dây nằm dọc theo giao tuyến giữa mặt cầu đơn vị và mặt phẳng $x+y+z = 0$. Nếu mật độ khối lượng tại mỗi điểm trên dây được cho bởi $\rho(x, y, z) = x^2$ (grams / đơn vị chiều dài), hỏi sợi dây nặng bao nhiêu?

Câu 4. Một đường cong trong mặt phẳng được tham số hóa bởi

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1\right)\vec{\mathrm{i}} + \frac{2t}{t^2+1}\vec{\mathrm{j}}, \quad t \geq 0.$$

Gọi $s(t)$ là chiều dài của đường cong từ $t = 0$. Hãy viết lại phương trình của $\vec{r}$ theo tham số chiều dài s, nghĩa là tìm $\vec{r}(s)$.

Câu 5. Tính tích phân $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, trong đó

$$\vec{F}(x, y) = \frac{x}{y^2 - x^2}\vec{\mathrm{i}} - \frac{y}{y^2 - x^2}\vec{\mathrm{j}},$$

và $C \subset \mathbb{R}^2$ là đường đi dọc theo đường ellipse $4x^2 + (y-4)^2 = 4$, từ điểm $(0, 2)$ đi ngược chiều kim đồng hồ đến điểm $(-1, 4)$.

Câu 6. Tính tích phân $\oint_C (x \sin(y^2) - y^2)\, \mathrm{d}x + (x^2 y \cos(y^2) + 3x)\, \mathrm{d}y$, trong đó C là đường thẳng gấp khúc kín nối các đỉnh $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, và $(0, 2)$; được định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 7. Trong $\mathbb{R}^3$, giả sử hai mặt cong S_1 và S_2 có cùng đường biên và cùng hướng trên biên. Với một trường $\vec{F}$ trơn bất kỳ trên cả hai mặt S_1 và S_2, hỏi tích phân $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ có luôn bằng với $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ hay không? Giải thích.

Câu 8. Cho trường $\vec{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$ và mặt cong S cho bởi phương trình $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z \leq 2$, định hướng xuống. Tính lưu lượng của trường $\vec{F}$ qua mặt S bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp tích phân mặt.
(b) Sử dụng công thức Stokes.

Câu 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh rằng $\oint_C f\nabla g \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\oint_C g\nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, trong đó f, g là hai trường vô hướng, và C là biên của một mặt cong đơn, chính quy, trơn cấp hai.

Câu 10. Với trường $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z(x^2 + y^2))$, chứng minh rằng $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ với C là bất kỳ đường đi chính quy từng khúc, kín trên bề mặt của hình nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Câu 11. Cho trường $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$ và C là đường tròn đơn vị tâm O trong mặt phẳng Oxy, định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

(a) Chứng minh rằng $\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \neq 0$ mặc dù $\operatorname{curl} F = \vec{0}$. Điều này có mâu thuẫn với kết quả của công thức Stokes không?
(b) Hỏi trường $\vec{F}$ có bảo toàn trên miền xác định không?

Câu 12. Cho trường $F(x, y, z) = (e^z \arctan y^4, z^6 \ln(x^4 + 5), z)$. Tính thông lượng của trường F đi qua mặt paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 1$, định hướng lên.

Câu 13. Cho miền $E \subset \mathbb{R}^3$ xác định bởi $x^2 + y^2 + (z + 4)^2 \leq 25$ với $z \geq 0$.

(a) Sử dụng hệ tọa độ trụ (r, θ, z) để tìm thể tích của E.
(b) Kiểm lại kết quả trên bằng cách sử dụng công thức Gauss–Ostrogradsky với trường vectơ thích hợp.